FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

BDA002 Pružnost a pevnost

přednáška 1 (v.23/24.1)

Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2023/2024

Obsah

- pružnost a pevnost je součást mechaniky **kontinua**[1] (v pevné fázi) **deformovatelných** těles.
- předmětem zkoumání jsou:
  - napětí
  - deformace (přetvoření)
  - stabilita

[1] *Kontinuum je spojité prostředí, které lze popsat spojitými funkcemi*

Výchozí předpoklady lineární teorie pružnosti

- **Spojitost látky**
  - těleso jako kontinuum je vyplněno látkou bez mezer (nezohledňuje se mikrostruktura)
- **Lineární pružnost**
  - tzv. *fyzikální linearita*: těleso se po deformaci vrací do původního stavu
- **Homogenita*** a **izotropie****
  - * vlastnosti jsou ve všech bodech tělesa stejné; ** vlastnosti jsou nezávislé na směru
- **Malé deformace**
  - tzv. *geometrická linearita*: deformace konstrukcí jsou vzhledem rozměrům malé
- **Statické zatěžování**
  - zatížení na konstrukci narůstá dostatečně povlovně (nevznikají setrvačné síly)
- **Počáteční nenapjatost**

→ **uvedené předpoklady umožňují využít principu superpozice účinků**

Napětí

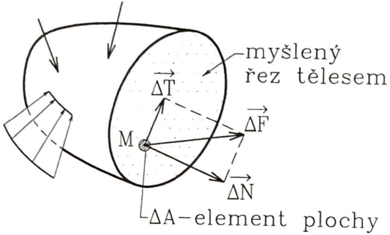
- normálové napětí

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta A}$$

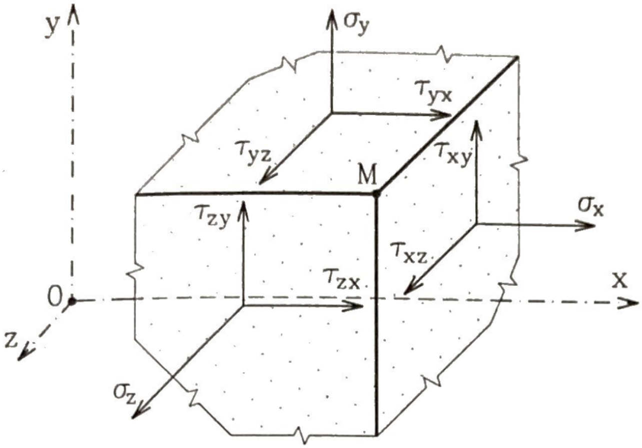
- smykové (tečné, tangenciální) napětí

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A}$$

Jednotka napětí je $[\mathrm{N/m^2}]$ resp. $[\mathrm{Pa}]$



Obr. 1: Napětí



Obr. 2: Označování složek napětí

- Z momentové podmínky k ose $\overline{z}$ vyplývá

$$\sum M_{i,\overline{z}} = 0$$

$$\tau_{xy} dydz \cdot dx - \tau_{yx} dxdz \cdot dy = 0$$

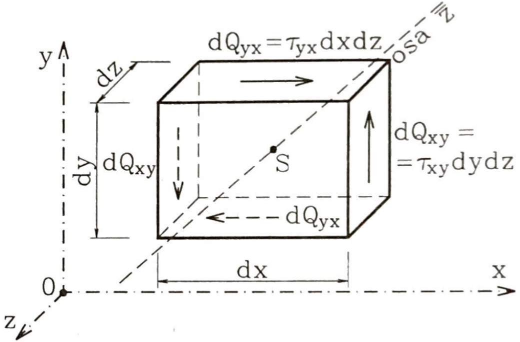
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

- pro ostatní smyková napětí platí analogicky

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- napjatost v bodě tělesa lze tedy popsat 6 nezávislými složkami napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$



Obr. 3: Věta o vzájemnosti smykových napětí

Vztahy mezi vnitřními sílami a napětími

$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A$$

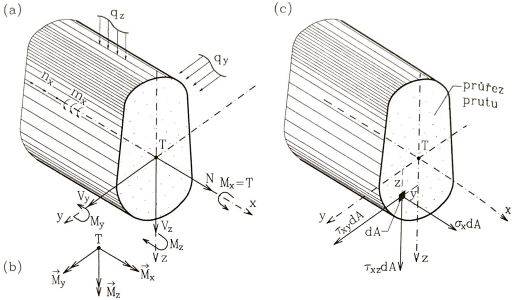
$$V_y = \int_A \tau_{xy} \mathrm{d}A$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \mathrm{d}A$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \mathrm{d}A$$

$$My = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A$$

$$My = -\int_A \sigma_x y \mathrm{d}A$$



Obr. 4: Napětí a vnitřní síly

Poměrné délkové a úhlové deformace

- Poměrná prodloužení (zkrácení) např.:

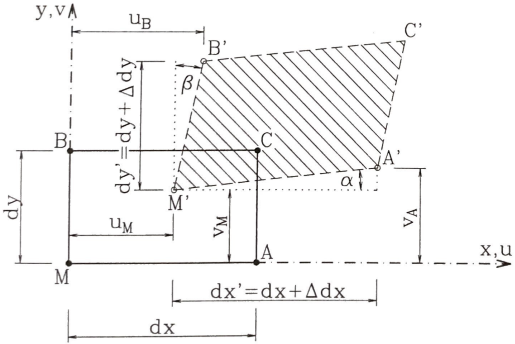
$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy}$$

- poměrné zkosení např.:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

- stav deformace v bodě tělesa lze tedy popsat 6 nezávislými složkami deformace: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$



Obr. 5: Poměrné deformace

- Hookův zákon v tahu a tlaku

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

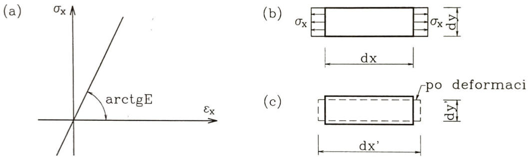
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

- kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův součinitel (0;0,5)
- Hookův zákon ve smyku

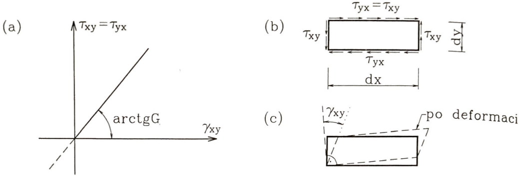
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- kde G je modul pružnosti ve smyku: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Obr. 6: Hookův zákon v tahu a tlaku

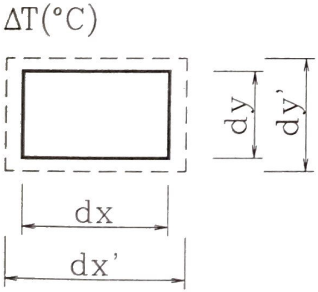


Obr. 7: Hookův zákon ve smyku

$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy,T} = \gamma_{yz,T} = \gamma_{zx,T} = 0$$

- kde α je součinitel tepelné roztažnosti $[K^{-1}]$, resp. $[°C^{-1}]$
- není-li deformaci bráněno, nevzniká v tělese napětí



Obr. 8: Deformace od změny teploty

Tah & tlak

- jediná nenulová vnitřní síla je **normálová síla**

$$N \neq 0, \quad V_y = V_z = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0$$

  - $N > 0$ ... tah
  - $N < 0$ ... tlak
- předpoklady:
  - tzv. *Bernoulliova hypotéza*: průřezy jsou rovinné a kolmé ke střednici **před** i **po** deformaci

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

  - podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Napětí (po výšce průřezu rovnoměrné)

$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A$$

$$N = \sigma_x A$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

- Předpoklady:
  - neexistují poruchy napjatosti
  - vl. tíha je samostatný zatěžovací stav
  - prut je přímý a $F << F_{crit}$ (nedochází ke ztrátě stability)

Deformace (po výšce průřezu rovnoměrné) pro lin. pružný materiál

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

- poměrné přetvoření je způsobeno i teplotním namáháním

$$\varepsilon_t = \alpha\Delta t,\ \text{kde } \Delta t = t_0 - t_1$$

- teplota u stat. určité konstrukce způsobuje deformaci a u staticky neurčité napjatost

Posuny

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$u = \int \varepsilon_x \mathrm{d}x + C$$

konst. C se určí z podepření. Je-li začátek $a = 0$ prutu délky $L = b - a$, $E, A, N = \text{konst.}$ pak

$$u_b = \int_a^b \varepsilon_x \mathrm{d}x = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x = \frac{NL}{EA}$$

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (EA \text{ ozn. osovou tuhost})$$

- dále platí: $u_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$; $\Delta L_t = \alpha \Delta t L$; v příčném směru: $\Delta h = h\varepsilon_z = -h\nu\frac{\sigma_x}{E} = -\nu\frac{Nh}{EA}$

Použitá literatura

ŠMIŘÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.